Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 07 Novembre 2013

Contrôle N°1 de Mécanique du point matériel
Filière S1-SMP/SMC
Durée de l'épreuve : 1h30mn

Exercice 1 (6 points)

Dans un référentiel $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les coordonnées d'un point matériel M sont données par les fonctions du temps $x(t) = t$, $y(t) = t(t-1)$ et $z(t) = 0$ où t est le temps.

1) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du point M. En déduire sa nature.

2) Déterminer les composantes et le module de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ à l'instant t.

3) Déterminer l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$.

4) Discuter la nature du mouvement de M en fonction de t.

5) Déterminer les vecteurs de la base de Fresnet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$, sachant que $\vec{b} = \vec{k}$.

6) En déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération du point M.

7) Déterminer le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de t.

Problème (14 points)

Dans un repère $\mathcal{R}(O, XYZ)$ supposé fixe et muni de la base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un cercle (C) de centre O_1 et de rayon a passe par l'origine O. On désigne par $\mathcal{R}_1(O_1, X_1Y_1Z_1)$ le repère lié au cercle et muni de la base orthonormé directe $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$. Le cercle (C) tourne dans le plan (OXY) avec la vitesse angulaire constante ω telle que $(\widehat{\vec{i},\vec{i}_1})=(\widehat{\vec{j},\vec{j}_1}) = \varphi(t) = \omega t$, comme l'indique la figure ci-dessous. Un point matériel M se déplace sur le cercle (C) avec une vitesse angulaire constante ω telle que $(\widehat{\vec{i}_1,\vec{e}_\rho})=(\widehat{\vec{j}_1,\vec{e}_\varphi}) = \varphi(t) = \omega t$. On désigne par $\mathcal{R}_2(O_1, X_2Y_2Z)$ le repère lié au point M et muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$.

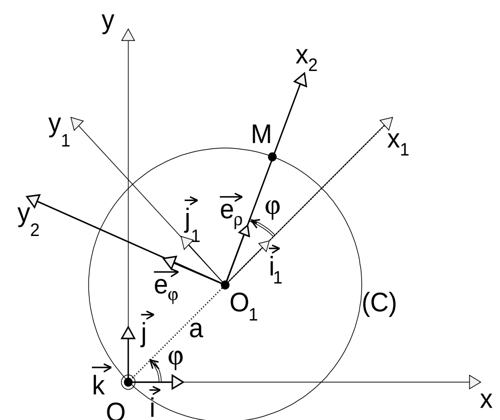
Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$.

I- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}$

1) Exprimer les vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ en fonction des vecteurs $\vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$.

2) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M.

3) En déduire la vitesse absolue et l'accélération absolue du point M.



II- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_1$

On suppose que $\mathcal{R}_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$ est le repère relatif, $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant le repère absolu.

1) Vérifier que le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}$.

2) Déterminer la vitesse relative $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ du point M.

3) Déterminer l'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ et l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M .

4) En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ du point M. Comparer les résultats trouvés avec ceux calculés en **I-3)**.

III- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_2$

On suppose dans ce cas que le repère $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est le repère relatif, $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant le repère absolu.

1) Déterminer $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$. En déduire que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) = 2\omega\vec{k}$.

2) Déterminer la vitesse relative $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R}_2)$ et la vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ du point M.

3) Déterminer l'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_2)$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ et l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M.

4) En déduire la vitesse absolue $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ du point M. Comparer les résultats trouvés avec ceux calculés en **I-3)** et **II-4)**. Que peut-on conclure ?

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 07 Novembre 2013

Corrigé et barème du contrôle N°1
Mécanique du point matériel
Filière S1-SMP/SMC

Note : *Deux méthodes sont proposées pour la solution de certaines questions. Pour éviter toute confusion à propos du barème, seule la première méthode est notée. Prière d'appliquer le même barème à la deuxième méthode.*

Exercice 1 (6 points)

Les coordonnées d'un point M sont données dans le référentiel $\mathcal{R}(O, XYZ)$ par les fonctions du temps $x(t) = t$, $y = t(t-1)$ et $z(t) = 0$ où t est le temps.

0.75pt

1) L'équation cartésienne de la trajectoire du point M est obtenue en exprimant $y = y(x)$:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t(t-1) = x(x-1) \Longrightarrow \boxed{y = x^2 - x} \quad \text{et} \quad z = 0. \end{cases}$$ **0.5pt**

C'est l'équation d'une parabole. **0.25pt**

0.75pt

2) Calculons la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$, sachant que le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \\ &= \vec{i} + (2t-1)\vec{j}. \end{aligned}$$ **0.5pt**

Le module de la vitesse est égal à

$$\begin{aligned} V &= \|\vec{V}(M/\mathcal{R})\| = \sqrt{\vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})} \\ &= \sqrt{(\vec{i} + (2t-1)\vec{j}) \cdot (\vec{i} + (2t-1)\vec{j})} = \sqrt{1 + (2t-1)^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}. \end{aligned}$$ **0.25pt**

0.5pt

3) L'accélération du point M par rapport à $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= 2\vec{j}. \end{aligned}$$ **0.5pt**

4) Le module de la vitesse, $V = \sqrt{1 + (2t-1)^2}$, varie avec le temps donc c'est un mouvement non

1.5pt

uniforme. **0.5pt**
Pour établir s'il est accéléré ou bien retardé, nous avons deux méthodes.

<u>Méthode 1 :</u> On utilise le produit scalaire entre l'accélération et la vitesse

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= V\frac{dV}{dt} \\ &= (\vec{i} + (2t-1)\vec{j}) \cdot 2\vec{j} \\ &= 2(2t-1) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\frac{dV}{dt}$ a le même signe que $(2t-1)$:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t-1 \geq 0 \Longrightarrow t \geq \frac{1}{2} \quad \text{mouvement accéléré} \quad \textbf{0.5pt} \\ \frac{dV}{dt} < 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t-1 < 0 \Longrightarrow 0 \leq t < \frac{1}{2} \quad \text{mouvement retardé ou décéléré} \quad \textbf{0.5pt} \end{cases}$$

Méthode 2 : On calcule directement la dérivée par rapport au temps du module de la vitesse V :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\sqrt{1+(2t-1)^2}\right] \\ &= \frac{2(2t-1)}{\sqrt{1+(2t-1)^2}} \end{aligned}$$

on en déduit que $\frac{dV}{dt}$ a le même signe que $(2t-1)$, ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t-1 \geq 0 \Longrightarrow t \geq \frac{1}{2} \quad \text{mouvement accéléré} \\ \frac{dV}{dt} < 0 \quad \Longrightarrow \quad 2t-1 < 0 \Longrightarrow 0 \leq t < \frac{1}{2} \quad \text{mouvement retardé ou décéléré} \end{cases}$$

1pt

5) Les vecteurs de la base de Fresnet sont donnés par

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|} \\ &= \frac{\vec{i}+(2t-1)\vec{j}}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}. \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

Le mouvement se fait dans le plan Oxy ce qui implique que $\vec{b}=\vec{k}$. D'où, l'expression de $\vec{n}$ est égale à

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{k} \wedge \vec{\tau} \\ &= \vec{k} \wedge \frac{\vec{i}+(2t-1)\vec{j}}{\sqrt{1+(2t-1)^2}} \\ &= \frac{-(2t-1)\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}. \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

1pt

6) Calcul de l'accélération tangentielle γ_t : deux méthodes

Méthode 1 : Connaissant l'expression de $\vec{\gamma}(M\mathcal{R})$ et de $\vec{\tau}$, on déduit l'accélération tangentielle par

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{\tau} \\ &= 2\vec{j} \cdot \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|} \\ &= \frac{2(2t-1)}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}. \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

Méthode 2 : On calcule l'accélération tangentielle à partir de la dérivée par rapport au temps du module de la vitesse

$$\begin{aligned} \gamma_t &= \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\sqrt{1+(2t-1)^2}\right] \\ &= \frac{2(2t-1)}{\sqrt{1+(2t-1)^2}} \end{aligned}$$

Calcul de l'accélération normale γ_n : deux méthodes
Méthode 1 : Connaissant $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{n}$, on déduit γ_n par

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})\cdot\vec{n}\\ &= 2\vec{j}\cdot\frac{-(2t-1)\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}.\end{aligned}$$

0.5pt

Méthode 2 : On déduit γ_n à partir de $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ et γ_t par

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \sqrt{\gamma^2(M/\mathcal{R})-\gamma_t^2}\\ &= \sqrt{4-\frac{4(2t-1)^2}{1+(2t-1)^2}}\\ &= \sqrt{\frac{4-4(2t-1)^2+4(2t-1)^2}{1+(2t-1)^2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+(2t-1)^2}}.\end{aligned}$$

0.5pt

7) Calcul du rayon de courbure R : deux méthodes
Méthode 1 : on utlise γ_n et on obtient

$$\begin{aligned}R=\frac{V^2}{\gamma_n} &= \frac{\left(1+(2t-1)^2\right)\times\left(\sqrt{1+(2t-1)^2}\right)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+(2t-1)^2\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

0.5pt

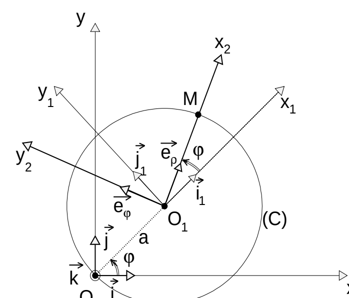
Méthode 2 : on utilise $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ comme suit

$$\begin{aligned}R &= \frac{V^3}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\wedge\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})\|}\\ &= \frac{\left(1+(2t-1)^2\right)^{3/2}}{\|2\vec{k}\|}=\frac{1}{2}\left(1+(2t-1)^2\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

PROBLÈME (14 points)

Données du problème :

$\mathcal{R}(O,XYZ)$ est le référentiel fixe muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$;
$\mathcal{R}_1(O_1,X_1Y_1Z_1)$ est un référentiel mobile muni de la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$ tel que $(\widehat{\vec{i},\vec{i}_1})=(\widehat{\vec{j},\vec{j}_1})=\varphi(t)=\omega t$, ;
$\mathcal{R}_2(O_2,X_2Y_2Z_2)$ est un référentiel mobile muni de la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ tel que $(\widehat{\vec{i}_1,\vec{e}_\rho})=(\widehat{\vec{j}_1,\vec{e}_\varphi})=\varphi(t)=\omega t$. ω est constante.



Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k})$.

I- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}$

1pt

1) Expressions de $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$ en fonction $\vec{i}_1$ et $\vec{j}_1$:
nous projetons les deux vecteurs respectivement comme suit

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1 \quad \textbf{0.5pt} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1 \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

0.5pt

2) Expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ de M :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} &= a\vec{i}_1 + a\vec{e}_\rho \\ &= a\left(\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right) \\ &= a\left[(1+\cos\varphi)\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

2.5pt

3) Expressions de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et de l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$:

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= a\left[-\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+\cos\varphi)\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \dot{\varphi}\cos\varphi\vec{j}_1 + \sin\varphi\left.\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}}\right] \\ &= a\omega\left[-2\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+2\cos\varphi)\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{1pt} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= a\omega^2\left[-2\cos\varphi\vec{i}_1 - 2\sin\varphi\vec{j}_1 - 2\sin\varphi\vec{j}_1 - (1+2\cos\varphi)\vec{i}_1\right] \\ &= -a\omega^2\left[(1+4\cos\varphi)\vec{i}_1 + 4\sin\varphi\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{1.5pt} \end{aligned}$$

II- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_1$

1) Vérifions l'expression de $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$:

$$\vec{i}_1 = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\varphi}\vec{j}_1 = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{i}_1$$

comme

$$\left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{i}_1 = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{i}_1$$

en comparant cette dernière expression avec celle calculée auparavant, on en déduit que

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k}} \quad \textbf{0.5pt}$$

1pt

2) Expressions de $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et de $\vec{V}_e$ de M :

$$\begin{aligned}\vec{V}_r &= \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \frac{d}{dt}\left[a\left(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right)\right] \\ &= a\omega\left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right).\quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{V}_e &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= a\omega\vec{j}_1 + a\omega\vec{k} \wedge \left[\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right] \\ &= a\omega\left[-\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+\cos\varphi)\vec{j}_1\right]\end{aligned}$$

1.5pt

3) Expressions de $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$, $\vec{\gamma}_e$ et de $\vec{\gamma}_c$:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_r &= \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= -a\omega^2\left[\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right].\quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e &= \left.\frac{d\vec{V}(O/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}) \\ &= a\omega^2\left[-\vec{i}_1 + \vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho\right)\right] \\ &= a\omega^2\left[-\vec{i}_1 - \vec{e}_\rho\right] \\ &= -a\omega^2\left[(1+\cos\varphi)\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right].\quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r \\ &= 2a\omega^2\vec{k} \wedge \left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right) \\ &= -2a\omega^2\left(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right).\quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

1.5pt

4) Expressions de $\vec{V}_a = \vec{V}(M/\mathcal{R})$ et de $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M\mathcal{R})$:

$$\begin{aligned}\vec{V}_a &= \vec{V}_r + \vec{V}_e \\ &= a\omega\left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right) + a\omega\left[-\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+\cos\varphi)\vec{j}_1\right] \\ &= a\omega\left[-2\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+2\cos\varphi)\vec{j}_1\right]\quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_a &= \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \\ &= -a\omega^2\left(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right) - a\omega^2\left[(1+\cos\varphi)\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right] - 2a\omega^2\left(\cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right) \\ &= -a\omega^2\left[(1+4\cos\varphi)\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1\right].\quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

On note que les résultats obtenus par décomposition des mouvements sont identiques à ceux obtenus par le calcul direct. **0.5pt**

III- Etude du mouvement de M dans $\mathcal{R}_2$

1pt

1) Expression de $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})$:

Méthode 1 :

Expression de $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1 \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho$$

comme

$$\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)\wedge\vec{e}_\rho = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)\wedge\vec{e}_\rho$$

en comparant cette dernière expression avec celle calculée auparavant, on en déduit que

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\varphi}\vec{k}}. \quad \textbf{0.5pt}$$

Comme $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \omega\vec{k}$ ce qui implique que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = 2\omega\vec{k}$. **0.5pt**

Méthode 2 :

$$\vec{e}_\rho = \cos(2\varphi)\vec{i} + \sin(2\varphi)\vec{j} \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = 2\dot{\varphi}\left(-\sin(2\varphi)\vec{i} + \cos(2\varphi)\vec{j}\right) = 2\omega\vec{e}_\varphi = 2\omega\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho$$

avec $\vec{e}_\varphi = -\sin(2\varphi)\vec{i} + \cos(2\varphi)\vec{j}$. Comme

$$\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})\wedge\vec{e}_\rho = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})\wedge\vec{e}_\rho$$

et en identifiant cette dernière expression à celle trouvée dans l'expression précédente, on déduit que

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) = 2\omega\vec{k}.$$

1pt

2) Expressions de $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R}_2)$ et de $\vec{V}_e$ de M :

$$\vec{V}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} = a\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} = \vec{0}. \quad \textbf{0.5pt}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{V}_e &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})\wedge\overrightarrow{O_1M} \\
&= a\omega\vec{j}_1 + 2a\omega\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho \\
&= a\omega\vec{j}_1 + 2a\omega\left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right) \\
&= a\omega\left[-2\sin\varphi\vec{i}_1 + (1+2\cos\varphi)\vec{j}_1\right]. \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

1.5pt

3) Expressions de $\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_2)$, $\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_c$:

$$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_2)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_2} = \vec{0} \quad \textbf{0.5pt}$$

et

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d\vec{V}(O_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$= -a\omega^2\vec{i}_1 + 2\omega\vec{k} \wedge \left(2\omega\vec{k} \wedge a\vec{e}_\rho\right)$$

$$= -a\omega^2\vec{i}_1 - 4a\omega^2\vec{e}_\rho = -a\omega^2\left[(1 + 4\cos\varphi)\vec{i}_1 + 4\sin\varphi\vec{j}_1\right]$$ **0.5pt**

et

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M\mathcal{R}_2) = \vec{0}.$$ **0.5pt**

1pt

5) Expressions de la vitesse absolue $\vec{V}_a = \vec{V}(M/\mathcal{R})$ et de $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{V}_a = \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$= a\omega\left[-2\sin\varphi\vec{i}_1 + (1 + 2\cos\varphi)\vec{j}_1\right]$$ **0.5pt**

et

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

$$= -a\omega^2\left[(1 + 4\cos\varphi)\vec{i}_1 + 4\sin\varphi\vec{j}_1\right].$$ **0.5pt**

On constate de nouveau que $\vec{V}_a$ et $\vec{\gamma}_a$ sont identiques aux expressions trouvées en **I-3)** et **II-4)**. **0.5pt**

On en conclut que les expressions de $\vec{V}_a$ et de $\vec{\gamma}_a$ sont indépendantes du choix du référentiel relatif.

Elles ne dépendent que du référentiel absolu. **0.5pt**.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 9 Janvier 2014

Contrôle N°2 de Mécanique du point matériel
Filières S1-SMP/SMC
Durée de l'épreuve : 1h30mn

Questions de cours (4 points)

Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel galiléen et soit M un point matériel animé d'une vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ par rapport $\mathcal{R}$ et soumis à une force $\vec{F}$.

1. Etablir le théorème du moment cinétique par rapport au point O dans $\mathcal{R}$.
2. Que devient le théorème du moment cinétique par rapport à un point A mobile avec une vitesse $\vec{V}(A/\mathcal{R})$ par rapport à $\mathcal{R}$?
3. Soit $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ un référentiel non galiléen en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. Etablir le théorème du moment cinétique par rapport au point O_1 dans $\mathcal{R}_1$.

Problème (16 points)

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel S autour de la Terre dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}(O, xyz)$ que l'on suppose galiléen. Le satellite S n'est soumis qu'à l'action de la force gravitationnelle $\vec{F}$ de la Terre, l'effet des autres interactions étant considéré négligeable. Soient M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. Soit m la masse du satellite, supposée négligeable devant celle de la terre, $m \ll M_T$. G est la constante gravitationnelle. La position du satellite est repérée par $\overrightarrow{OS}$.

1. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le moment cinétique du satellite $\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})$ par rapport au point O dans $\mathcal{R}$ est constant. En déduire que le mouvement de S par rapport à $\mathcal{R}$ est plan.

On choisit le plan du mouvement de S confondu avec le plan Oxy et on utilise les coordonnées polaires (ρ, φ) pour repérer la position de S.

3. Etablir l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})$. Quelle est l'expression de la constante des aires C définie par $C = \dfrac{|\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})|}{m}$?

4. Exprimer l'énergie cinétique E_c du satellite et son énergie potentielle E_p, sachant que $E_p \to 0$ quand $\rho \to +\infty$, en fonction de ρ, $\dot{\rho}$ et de C. En déduire l'énergie mécanique E_m du satellite.

   La trajectoire de S dans $\mathcal{R}$ est une conique d'équation $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}$ de paramètre $p = \dfrac{C^2}{GM_T}$, d'excentricité e et φ_0 étant la valeur de φ à l'instant initial.

5. Calculer $\dot{\rho}$ en fonction de C, p, e, φ et φ_0.
6. Montrer que l'énergie mécanique E_m est liée à l'excentricité e par la relation

$$E_m = \frac{GmM_T}{2p}\left(e^2 - 1\right)$$

7. Le satellite est mis sur une orbite circulaire de rayon ρ et dont la période de révolution est T_0 (la durée au bout de laquelle le satellite effectue un tour autour de la Terre).

7-a) Que devient l'expression de E_m en fonction de ρ ?

7-b) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. Calculer le module de la vitesse du satellite $V = |\vec{V}(S/\mathcal{R})|$ en fonction de G, M_T et ρ.

8. Dans la suite de l'exercice, on suppose que le satellite S subit, en plus de la force gravitationnelle $\vec{F}$, une force de frottement due à la résistance de l'air et dont l'expression est donnée par $\vec{f} = -kmV\vec{V}(S/\mathcal{R})$ où k est une constante positive. Cette force reste suffisamment faible pour que la trajectoire soit pratiquement circulaire(On peut utiliser l'approximation que la trajectoire est circulaire) et l'énergie mécanique E_m du satellite garde l'expression établie en 7-a).

On suppose que l'effet de la force de frottement $\vec{f}$ sur l'orbite du satellite est de causer une variation faible de son rayon ρ. On cherche à calculer la variation du rayon $\Delta\rho$ de l'orbite lors d'une période de révolution, sachant que $\Delta\rho \ll \rho$.

8-a) Calculer le travail élémentaire de la force de frottement $\delta W(\vec{f})$. En déduire que le travail de la force de frottement $W(\vec{f})$ au cours d'une période de révolution $T_0 = \dfrac{2\pi\rho}{V}$ est donné par

$$W(\vec{f}) = -2\pi kGmM_T.$$

8-b) Calculer $E_m(\rho + \Delta\rho)$. On donne $\dfrac{1}{1+\frac{\Delta\rho}{\rho}} \simeq 1-\dfrac{\Delta\rho}{\rho}$.

8-c) En déduire l'expression de $\Delta E_m = E_m(\rho + \Delta\rho) - E_m(\rho)$.

8-d) En utilisant le théorème de l'énergie mécanique $\Delta E_m = W(\vec{f})$, montrer que la variation du rayon de l'orbite due à la force de frottement au cours d'une période de révolution est

$$\Delta\rho = -4\pi k\rho^2.$$

8-e) Conclure sur l'effet de la force de frottement $\vec{f}$ sur le rayon de l'orbite et sur la vitesse du satellite.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 09 Janvier 2013

Corrigé et barème du contrôle N°2
Mécanique du point matériel
Filières S1-SMP/SMC

Les notes doivent être saisies avant le 18 janvier 2014, délai de rigueur.

Note : *Prière de considérer toutes les réponses correctes non mentionnées dans ce corrigé.*

Questions de cours (4 points)

1pt

1. Sachant que $\mathcal{R}$ est galiléen et en dérivant $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ on obtient

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{OM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \quad \textbf{0.5pt}$$

comme $\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\vec{V}(M/\mathcal{R})$ alors

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \quad \textbf{0.25pt}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, $d\vec{p}(M/\mathcal{R})/dt = \vec{F}$, on obtient

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}). \quad \textbf{0.25pt}$$

2pt

2. Etablissons la dérivée par rapport au temps du moment cinétique évalué par rapport à un point mobile A, sachant que $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R})$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \quad \textbf{1pt}$$

Si l'on fait interposer le point O, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ on obtient

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{V}(M/\mathcal{R}) - \vec{V}(A/\mathcal{R}) \quad \textbf{0.5pt}$$

ce qui donne

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F}) + \vec{p}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R}). \quad \textbf{0.5pt}$$

1pt

3. Appliquons le théorème du moment cinétique au point O_1, origine de $\mathcal{R}_1$ en notant par $\vec{f}_{ie}$ et $\vec{f}_{ic}$ respectivement les forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis :

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\vec{\sigma}_{o_1}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} &= \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}_1) + \overrightarrow{O_1M} \wedge \left.\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \overrightarrow{O_1M} \wedge \left(\vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{M}_{o_1}}(\vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}) \quad \textbf{1pt}\end{aligned}$$

Corrigé du problème (16 points)

$\mathcal{R}(O, xyz)$ est le référentiel géocentrique supposé galiléen.
Le satellite S n'est soumis qu'à l'action de la force gravitationnelle $\vec{F}$ de la Terre, l'effet des autres interactions étant considéré négligeable.
Soient M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. G est la constante gravitationnelle.
Soit m la masse du satellite, supposée négligeable devant celle de la terre, $m \ll M_T$.
La position du satellite est repérée par $\overrightarrow{OS}$.

0.5pt

1. L'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}$ est

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{|\overrightarrow{OS}|^3}\overrightarrow{OS}. \quad \textbf{0.5pt}$$

1pt

2. Comme la force gravitationnelle est une force centrale, $\vec{F}//\overrightarrow{OS}$, alors son moment par rapport à O est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \overrightarrow{OS} \wedge \frac{-GM_T m}{|\overrightarrow{OS}|^3}\overrightarrow{OS} = \vec{0} \quad \textbf{0.25pt}$$

Aussi le théorème du moment cinétique permet d'écrire

$$\frac{d\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \vec{0} \quad \textbf{0.25pt}$$

$$\Longrightarrow \vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\text{constante}} \quad \textbf{0.25pt}$$

$\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})$ est constant en module, en direction et en sens. Comme il est perpendiculaire simultanément à $\overrightarrow{OS}$ et à la vitesse de S par rapport à $\mathcal{R}$ alors le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})$. **0.25pt**

On choisit le plan du mouvement de S confondu avec le plan Oxy et on utilise les coordonnées polaires (ρ, φ) pour repérer la position de S.

1pt

3. Calculons la vitesse sachant que $\overrightarrow{OS} = \rho\vec{e}_\rho$

$$\vec{V}(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OS}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \textbf{0.25pt}$$

ce qui donne pour le moment cinétique de S par rapport à O dans $\mathcal{R}$

$$\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{V}(S/\mathcal{R})$$
$$= m\rho\vec{e}_\rho \wedge \left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right) = m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k}. \quad \textbf{0.5pt}$$

La constante des aires $C = \dfrac{|\vec{\sigma}_o(S/\mathcal{R})|}{m} = \rho^2\dot{\varphi}$ **0.25pt**.

2.5pt

4. L'énergie cinétique E_c est donnée par

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right).$$

Comme $C=\rho^2\dot\varphi \Longrightarrow \dot\varphi=\frac{C}{\rho^2}$ ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2+\frac{C^2}{\rho^2}\right).$$ **1pt**

L'attraction gravitationnelle est conservative. On calcule directement son énergie potentielle comme suit

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec F\cdot d\overrightarrow{OS}=\frac{GmM_T}{\rho^2}\vec e_\rho\cdot\left(d\rho\vec e_\rho+\rho d\vec e_\rho\right)\\ &= \frac{GmM_T}{\rho^2}d\rho \Longrightarrow E_p=-\frac{GmM_T}{\rho}+\text{Constante}\end{aligned}$$ **1pt**

nous avons utilisé $\vec e_\rho\cdot d\vec e_\rho=\vec e_\rho\cdot\left(d\varphi\vec e_\varphi\right)=0$. Comme $E_p\to 0$ quand $\rho\to+\infty$, la constante est nulle. Ainsi $E_p=-\frac{GmM_T}{\rho}$ **0.25pt**.

L'énergie mécanique E_m est égale à

$$E_m = E_c+E_p=\frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2+\frac{C^2}{\rho^2}\right)-\frac{GmM_T}{\rho}.$$ **0.25pt**

La trajectoire de S dans $\mathcal{R}$ est une conique d'équation $\rho=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}$ de paramètre $p=\frac{C^2}{GM_T}$, d'excentricité e et φ_0 qui est la valeur de φ à l'instant initial.

1pt

5. Calculons d'abord l'expression de $\dot\rho$ sachant que $\dot\varphi=C/\rho^2=C\frac{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}{p^2}$

$$\dot\rho = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\left(\frac{pe\sin(\varphi-\varphi_0)}{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}\right)C\frac{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}{p^2}=\frac{C}{p}e\sin(\varphi-\varphi_0).$$ **1pt**

1.5pt

6. Calculons la relation entre l'énergie mécanique E_m et l'excentricité e

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}m\left(\frac{C^2}{p^2}e^2\sin^2(\varphi-\varphi_0)+C^2\frac{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}{p^2}\right)-GmM_T\frac{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}{p}\\ &= \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{p}\left[e^2\sin^2(\varphi-\varphi_0)+(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2-2(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{p}\left[e^2\sin^2(\varphi-\varphi_0)+1+2e\cos(\varphi-\varphi_0)+e^2\cos^2(\varphi-\varphi_0)-2-2e\cos(\varphi-\varphi_0)\right]\\ &= \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{p}\left(e^2-1\right)\end{aligned}$$ **1.5pt**

qui est la relation demandée. On a utilisé la relation $C^2=pGM_T$.

7. Le satellite est mis sur une orbite circulaire de rayon ρ et dont la période de révolution est T_0 (la durée au bout de laquelle le satellite effectue un tour autour de la Terre).

1pt

7-a) Comme l'orbite est circulaire alors $e=0$ et en utilisant l'équation polaire de la conique on obtient $\rho=p=$ constante, ce qui donne pour l'énergie mécanique E_m

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{\rho}.$$ **1pt**

1.5pt **7-b)** Comme ρ est constant, alors $\dot{\rho} = 0$ et $\dot{\varphi} = C/\rho^2$ est constante puisque C est constante. Or le vecteur vitesse est donné par

$$\vec{V}(S/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \Longrightarrow |\vec{V}(S/\mathcal{R})| = \rho\dot{\varphi} = \rho\frac{C}{\rho^2} = \frac{C}{p} = \text{constante} \quad \textbf{0.5pt}$$

comme le module de la vitesse est constant alors le mouvement est uniforme. **0.5pt**
Sachant que $C = \sqrt{GM_T\rho}$, nous avons

$$|\vec{V}(S/\mathcal{R})| = \sqrt{\frac{GM_T}{\rho}}. \quad \textbf{0.5pt}$$

1.5pt 8. **8-a)** Calculons le travail de la force de frottement $\delta W(\vec{f})$:

$$\delta W(\vec{f}) = \vec{f}\cdot d\overrightarrow{OS} = -kmV\vec{V}(S/\mathcal{R})\cdot \left.\frac{d\overrightarrow{OS}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} dt$$
$$\Longrightarrow \delta W(\vec{f}) = -kmV^3 dt \quad \textbf{1pt}$$

comme V est constant, alors le travail de la force de frottement au cours d'une période de révolution $T_0 = \dfrac{2\pi\rho}{V}$ est

$$W(\vec{f}) = \int_0^{T_0} \delta W(\vec{f}) = -kmV^3\int_0^{T_0} dt$$
$$= -kmV^3T_0 = -2\pi km\rho V^2 = -2\pi km\rho\frac{GM_T}{\rho} = -2\pi kGmM_T. \quad \textbf{0.5pt}$$

1pt **8-b)** Calculons $E_m(\rho+\Delta\rho)$

$$E_m(\rho+\Delta\rho) = -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho+\Delta\rho}$$
$$= -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho(1+\frac{\Delta\rho}{\rho})} = -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho}\frac{1}{1+\frac{\Delta\rho}{\rho}}$$
$$\simeq -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \quad \textbf{1pt}$$

1pt **8-c)** Calculons $\Delta E_m = E_m(\rho+\Delta\rho) - E_m(\rho)$

$$\Delta E_m = E_m(\rho+\Delta\rho) - E_m(\rho) = -\frac{GmM_T}{2}\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) + \frac{GmM_T}{2\rho}$$
$$= \frac{GmM_T}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho^2}. \quad \textbf{1pt}$$

1pt **8-d)** Appliquons le théorème de l'énergie mécanique pour une révolution du satellite,

$$\Delta E_m = W(\vec{f}) \Longrightarrow \frac{GmM_T}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho^2} = -2\pi kGmM_T \Longrightarrow \Delta\rho = -4\pi k\rho^2 \quad \textbf{1pt}$$

qui est la relation recherchée.

1.5pt **8-e)** Comme $k > 0$ alors $\Delta\rho < 0$ ce qui implique que le rayon de l'orbite diminue. **0.75pt**.
Comme $V = \sqrt{\dfrac{GM_T}{\rho}}$ et ρ diminue alors le module de la vitesse augmente. **0.75pt**

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 24 Janvier 2014

Contrôle de rattrapage de Mécanique du Point Matériel
Filières SMP/SMC - S1
Durée de l'épreuve : 1h30mn

Exercice I (10 points)

On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$, supposé galiléen. Le point matériel M est soumis à l'action de la seule force $\vec{F}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2}$, a étant une constante postive.

1. Etablir l'expression de la force $\vec{F}$ à partir de son énergie potentielle $E_p(x, y)$. En déduire que $\vec{F}$ est une force centrale.
2. Montrer que le moment cinétique de M par rapport au point O dans $\mathcal{R}$, $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$, est conservé.

Dans la suite de l'exercice, la position du point matériel M est repérée par les coordonnées polaires (ρ, φ).

3. Etablir l'expression de la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$ en fonction de ρ, $\dot{\rho}$ et $\dot{\varphi}$.
4. Déterminer l'expression $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$.
5. Etablir l'expression de l'énergie cinétique E_c de M. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m de M en fonction ρ, $\dot{\rho}$, $\sigma_o(M/\mathcal{R})$ et de la masse m.
6. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'équation du mouvement est donnée par $$\ddot{\rho} - \frac{\sigma_o^2}{m^2\rho^3} + \frac{a}{m} = 0 \text{ avec } \sigma_o = |\vec{\sigma}_o(M\mathcal{R})|.$$
7. On considère le cas où M est animé d'un mouvement circulaire de rayon $\rho = \rho_0$. Que devient l'équation du mouvement ? En déduire que l'expression de ρ_0 est donnée par $\rho_0 = \left(\frac{\sigma_o^2}{am}\right)^{1/3}$.
8. Le point matériel M est soumis à des petites oscillations radiales telles que $\rho = \rho_0 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll \rho_0$.

   8-a) A partir de l'éqquation du mouvement établie en 6, déterminer l'équation différentielle vérifiée par ϵ.
   On utilisera l'approximation : $\frac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^3} \simeq 1 - 3\frac{\epsilon}{\rho_0}$.

   8-b) En déduire que la pulsation propre ω_0 des petites oscillations radiales est égale à $$\omega_0 = \left(\frac{27a^4}{m^2\sigma_o^2}\right)^{1/6}.$$

Exercice II (10 points)

On se propose d'étudier dans cet exercice le mouvement des chaises volantes d'un manège, voir photo ci-dessous(figure 1). Pour ce faire, on considère une chaise comme un point matériel

M de masse m suspendu à un disque D par un fil de longueur inextensible L. Le disque (D) de rayon R tourne à une vitesse angulaire constante ω et reste à tout instant horizontal et à une hauteur h constante du sol, voir figure 2.

Considérons $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel fixe, supposé galiléen, muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ un référentiel lié au disque D, que l'on utilise comme référentiel relatif, muni de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \equiv \vec{k})$. $\mathcal{R}_1$ tourne autour de l'axe Oz et le vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donné par $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ reste constamment dans le plan $(O_1x_1z_1)$ et sa direction par rapport à la verticale est repérée par l'angle θ.

On donne $\overrightarrow{OO_1} = h\vec{k}$, $\overrightarrow{O_1A} = R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{AM} = L\vec{u}_1$. On pose $\vec{u}_3 = -\vec{j}_1$ ainsi la famille des vecteurs unitaires $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forme une base orthonormée directe.

Toutes les expressions des grandeurs demandées doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

1. Déterminer les expressions des vecteurs $\vec{i}_1$ et $\vec{k}$ en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
2. Etablir les expressions des vecteurs vitesse relative $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et accélération relative $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$ de M.
3. Déterminer les expressions des accélérations d'entrainement, $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis, $\vec{\gamma}_c$, de M.
4. Donner les expressions des différentes forces exercées sur M dans $\mathcal{R}_1$.
5. Ecrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à M dans le référentiel $\mathcal{R}_1$.
6. Par projection du PFD sur la base :

   6-a) déterminer l'expression de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil sur M.

   6-b) établir l'équation différentielle du mouvement de M.



Figure 1 – Manège de chaises volantes

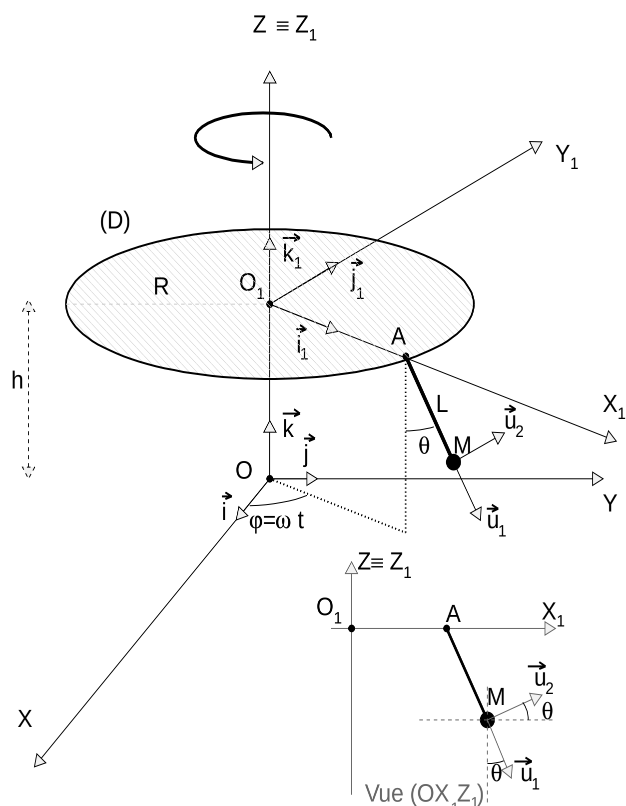


Figure 2 – Shéma utilisé pour résoudre l'exercice.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 24 Janvier 2013

Corrigé et barème du Rattrapage
Mécanique du point matériel
Filières S1-SMP/SMC

Les notes doivent être saisies avant le 29 janvier 2014, délai de rigueur.

Note : *Prière de considérer toutes les réponses correctes non mentionnées dans ce corrigé.*

Exercice I (10 points)

On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$, supposé galiléen. Le point matériel M est soumis à l'action de la seule force $\vec{F}$ qui dérive du potentiel $E_p(x, y, z) = a\sqrt{x^2 + y^2}$, a étant une constante postive.

1pt

1. Etant donné que la force dérive du potentiel $E_p(x, y, z)$, alors

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_p(x, y, z)\right) = -\vec{\nabla}(E_p) \quad \textbf{0.25pt}$$

sachant que le gradient s'exprime dans la base cartésienne comme suit [1] $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, nous avons alors

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p(x, y, z)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p(x, y, z)}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p(x, y, z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{F} = -a\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - a\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} = -a\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} \quad \textbf{0.5pt}$$

avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Comme $\vec{F}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$ alors $\vec{F}$ est une force centrale **0.25pt**.

0.5pt

2. On utilise le théorème du moment cinétique

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F})$$

$$= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(-a\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}\right)$$

$$= 0 \Longrightarrow \vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\text{Constante}} \quad \textbf{0.5pt}$$

puisque $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

1pt

3. Calculons l'expression de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad \textbf{1pt}$$

1pt

4. L'expression de $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= m\rho\vec{e}_\rho \wedge \left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right) \\ &= m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k}. \quad \text{1pt} \end{aligned}$$

1.5pt

5. L'expression de l'énergie cinétique est égale à

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right). \quad \text{0.5pt}$$

Sachant que le potentiel est donné par $E_p(\rho) = a\rho$, l'énergie mécanique est égale à

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + a\rho. \quad \text{0.5pt}$$

Or $\dot{\varphi} = \frac{\sigma_o}{m\rho^2}$, ce qui donne

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m\rho^2} + a\rho. \quad \text{0.5pt}$$

1.5pt

6. La seule force à laquelle est soumis le point matériel M est conservative et l'énergie mécanique ne dépend pas explicitement du temps alors cette dernière est conservée et donc

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= \frac{\partial E_m}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial E_m}{\partial \dot{\rho}}\ddot{\rho} \\ &= \dot{\rho}(a - \frac{\sigma_o^2}{m\rho^3}) + m\dot{\rho}\ddot{\rho} \\ &= 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{\rho} = 0 \Longrightarrow \rho = \text{constant} \quad \text{0.5pt} \\ \text{ou } \ddot{\rho} - \frac{\sigma_o^2}{m^2\rho^3} + \frac{a}{m} = 0 \text{ et c'est l'équation recherchée.} \quad \text{1pt} \end{array} \right. \end{aligned}$$

1pt

7. Si M est animé d'un mouvement circulaire de rayon $\rho = \rho_0$, alors $\dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$ 0.25pt et l'équation du mouvement devient

$$-\frac{\sigma_o^2}{m^2\rho_0^3} + \frac{a}{m} = 0 \quad \text{0.5pt} \Longrightarrow \rho_0 = \left(\frac{\sigma_0}{am}\right)^{1/3}. \quad \text{0.25pt}$$

2.5pt

8. Si M est soumis à des petites oscillations radiales $\rho = \rho_0 + \epsilon \Longrightarrow \ddot{\rho} = \ddot{\epsilon}$ 0.5pt

7-a) En substituant ρ par $\rho_0 + \epsilon$ dans l'équation du mouvement, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \ddot{\epsilon} - \frac{\sigma_0^2}{m^2\rho_0^3}\frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^3} + \frac{a}{m} = 0 \\ \Longrightarrow\ & \ddot{\epsilon} - \frac{\sigma_0^2}{m^2\rho_0^3}\left(1 - 3\frac{\epsilon}{\rho_0}\right) + \frac{a}{m} = 0 \\ \Longrightarrow\ & \ddot{\epsilon} + 3\frac{a}{m\rho_0}\epsilon = 0 \\ \Longrightarrow\ & \ddot{\epsilon} + \left(\frac{27a^4}{m^2\sigma_0}\right)^{1/3}\epsilon = 0 \quad \text{1.5pt} \end{aligned}$$

1. On accepte la réponse si le gradient est exprimé dans la base cylindrique même s'elle n'est pas encore définie.

et qui l'équation différentielle vérifiée par ϵ.

7-b) Les petites oscillations se font avec la pulsation propre ω_0 telle que

$$\omega_0 = \left(\frac{27a}{m^2\sigma_0}\right)^{1/6}.$$ 0.5pt

Exercice II (10 points)

On se propose d'étudier dans cet exercice le mouvement des chaises volantes d'un manège, voir photo ci-dessous(figure 1). Pour ce faire, on considère une chaise comme un point matériel M de masse m suspendu à un disque D par un fil de longueur inextensible L. Le disque (D) de rayon R tourne à une vitesse angulaire constante ω et reste à tout instant horizontal et à une hauteur h constante du sol, voir figure 2.

Considérons $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel fixe, supposé galiléen, muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ un référentiel lié au disque D, que l'on utilise comme référentiel relatif, muni de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \equiv \vec{k})$. $\mathcal{R}_1$ tourne autour de l'axe de Oz et le vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donné par $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ reste constamment dans le plan $(O_1x_1z_1)$ et sa direction par rapport à la verticale est repérée par l'angle θ.

On donne $\overrightarrow{OO_1} = h\vec{k}$, $\overrightarrow{O_1A} = R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{AM} = L\vec{u}_1$. On pose $\vec{u}_3 = -\vec{j}_1$ ainsi la famille des vecteurs unitaires $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forme une base orthonormée directe.

Toutes les expressions des grandeurs demandées doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.



Figure 1 – Manège de chaises volantes

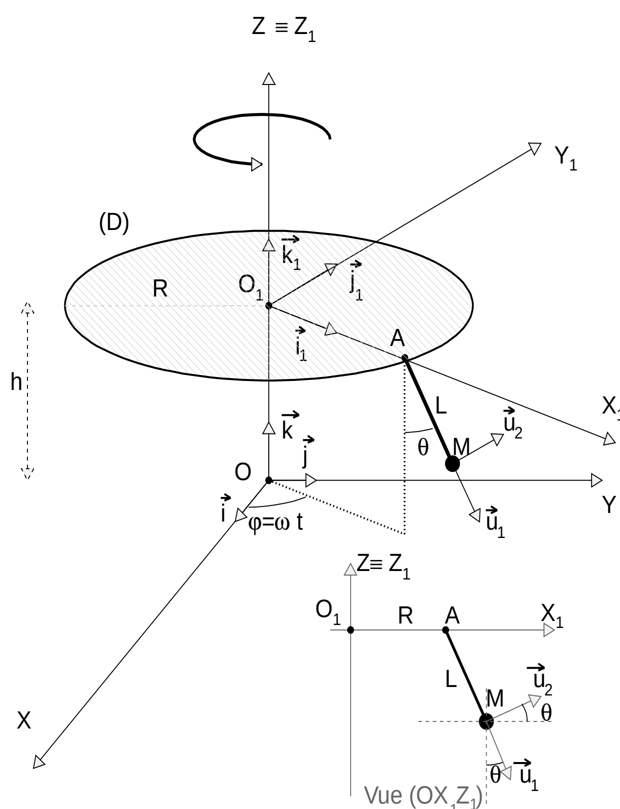


Figure 2 – Shéma utilisé pour résoudre l'exercice.

1pt

1. Calculons les expressions de $\vec{i}_1$ et de $\vec{k}$ en fonction $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\vec{i}_1 = \sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2$$ 0.5pt

$$\vec{k} = -\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2$$ 0.5pt.

2pt

2. Sachant que $\overrightarrow{O_1M} = L\vec{u}_1$, le vecteur vitesse relative est donné par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = L\left.\frac{d\vec{u}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = L\dot{\theta}\vec{u}_2. \quad \text{1pt}$$

Le vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r$ est donné par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_1 + L\ddot{\theta}\vec{u}_2. \quad \text{1pt}$$

2.5pt

3. Sachant que ω est constante, $\left.\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_e &= \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(\omega\vec{k} \wedge \left(R\vec{i}_1 + L\vec{u}_1\right)\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(R\omega\vec{j}_1 - L\omega\sin\theta\vec{u}_3\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(R\omega + L\omega\sin\theta\right)\vec{j}_1 \\
&= -\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\vec{i}_1 \\
&= -\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\left(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2\right) \quad \text{1.5pt}
\end{aligned}$$

L'expression de l'accélération de Coriolis est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \\
&= 2\omega\vec{k} \wedge L\dot{\theta}\vec{u}_2 \\
&= -2L\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3. \quad \text{1pt}
\end{aligned}$$

1pt

4. Les forces qui sont appliquée à M dans $\mathcal{R}_1$ sont :

$$\begin{cases}
m\vec{g} = -mg\vec{k} = -mg\left(-\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2\right) & \text{0.25pt} \quad \text{le poids;} \\
\vec{T} = -T\vec{u}_1 & \text{0.25pt} \quad \text{la tension du fil;} \\
\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\left(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2\right) & \text{0.25pt} \quad \text{la force d'inertie d'entrainement} \\
\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c = 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 & \text{0.25pt} \quad \text{la force d'inertie de Coriolis}
\end{cases}$$

1.5pt

5. Comme $\mathcal{R}_1$ n'est pas galiléen, l'expression du PFD appliqué à M dans $\mathcal{R}_1$ est donnée par

$$\begin{aligned}
m\vec{\gamma}(M\mathcal{R}_1) &= m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \quad \text{0.5pt} \\
\Longrightarrow -mL\dot{\theta}^2\vec{u}_1 + mL\ddot{\theta}\vec{u}_2 &= -mg\left(-\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2\right) - T\vec{u}_1 \\
&\quad + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\left(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2\right) + 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 \\
&= \left[mg\cos\theta - T + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\sin\theta\right]\vec{u}_1 \\
&\quad + \left[-mg\sin\theta + m\omega^2\left(R + L\sin\theta\right)\cos\theta\right]\vec{u}_2 + 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 \quad \text{1pt}
\end{aligned}$$

2pt

6. Par projection sur la base, on obtient

6-a) l'expression de T : projection sur $\vec{u}_1$

$$mg\cos\theta - T + m\omega^2 (R + L\sin\theta)\sin\theta = -mL\dot{\theta}^2$$

$$\Longrightarrow \quad T = mg\cos\theta + m\omega^2 (R + L\sin\theta)\sin\theta + mL\dot{\theta}^2$$

1 pt

6-b) l'expression de l'équation du mouvement : projection sur $\vec{u}_2$

$$-mg\sin\theta + m\omega^2 (R + L\sin\theta)\cos\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta - \omega^2 \left(\frac{R}{L} + \sin\theta\right)\cos\theta = 0$$

1pt